Topologia

Lista 4 (wnętrze, domknięcie, zbiory otwarte i domknięte)

Zad 1. Pokazać, że ciąg w przestrzeni z metryką dyskretną jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest od pewnego miejsca stały.

Zad 2. Wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną danego podzbioru prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, d_e)$:

$$A = \mathbb{N}, \quad B = \mathbb{Z}, \quad C = \mathbb{Q}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{R}, \quad F = (0,3], \quad G = (-\infty, 5],$$

$$H = (1,2) \setminus \mathbb{Q}, \quad I = [-3,3) \cup (5, +\infty), \quad J = \left\{x = 2^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{x : |x-4| < 1\},$$

$$K = \left\{x = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{x : |x| > 2\}, \quad L = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \Big([1,2] \cap \mathbb{Q}\Big).$$

Zad 3. Na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$ wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną zbioru

$$A = [0,1] \times [0,1), \quad B = \left\{\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad C = \{(x,y) : y = \sin\frac{1}{x},\ x > 0\},$$

$$D = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Q}\}, \quad E = \left\{(x,y) : y = \frac{1}{n}x,\ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad F = \{(x,y) : y = qx,\ q \in \mathbb{Q}\},$$

$$G = \left\{(x,y) : y^2 + x^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2,\ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad H = \{(x,y) : x \in [1,2) \cap \mathbb{Q},\ y \in (1,2) \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Zad 4. Sprawdzić, czy zbiór $\{tp + (t-1)q : t \in (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^2$, jest otwarty w metryce: a) euklidesowej, b) rzeka, c) studnia.

Zad 5. Wyznaczyć wszystkie zbiory otwarte i wszystkie zbiory domknięte w przestrzeni z metryką dyskretną.

Zad 6. Pokazać, że w dowolnej przestrzeni metrycznej kula otwarta jest podzbiorem otwartym, a kula domknięta podzbiorem domkniętym.

Zad 7. Podać przykład przestrzeni metrycznej, w której: a) domknięcie kuli otwartej nie pokrywa się z kulą domkniętą, b) wnętrze kuli domkniętej nie pokrywa się z kulą otwartą.

Zad 8. Niech τ będzie rodziną wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni metrycznej (X, d). Wykazać, że

i) $\emptyset \in \tau$ i $X \in \tau$,

ii) jeśli $U_1, U_2 \in \tau$, to $U_1 \cap U_2 \in \tau$,

iii) jeśli $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$, to $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Zad 9. Pokazać na przykładzie, że przekrój nieskończonej ilości zbiorów otwartych nie musi byc zbiorem otwartym.

Zad 10. Wykazać, że podzbiór A przestrzeni metrycznej X jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym.